De relatie harmonische ratuurtonenreeks – toonladder

J. de Ruiter, 2007

Welke tonen horen nu bij de reeks natuurtonen **f**, 2**f**, 3**f**, 4**f**, 5**f**, …….. ?
Om dit uit de doeken te doen moeten we het volgende bekend veronderstellen:

- Een halve toon hoger houdt in dat de frequentie met 6 % toeneemt.
- Als de frequentie van een toon verdubbeld wordt, ervaart ons gehoor beide tonen als min of meer gelijkklinkend. Zo'n toonhoogteverschil (interval) wordt een octaaf genoemd.
- De gewone toonladder do, re, mi, fa, sol, la, si, do bestaat uit een opklimmende reeks van 8 tonen met de volgende 7 intervallen:
  hele toon, hele toon, halve toon, hele toon, hele toon, hele toon, halve toon.
  De 2^e^ toon is dus een hele toon hoger dan de 1^e^, de 3^e^ ook een hele toon hoger dan de 2^e^, maar de 4^e^ toon is slechts een halve toon hoger dan de 3^e^. Enz.

Dit betekent dus het volgende:
als de begintoon do de frequentie **f** heeft, dan bestaat de gewone toonladder uit de volgende reeks opklimmende frequenties:

$\mathbf{f}\quad 1{,}06^{2}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{4}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{5}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{7}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{9}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{11}\mathbf{f}\quad 1{,}06^{12}\mathbf{f}$

De laatste toon heeft de frequentie $1{,}06^{12}\mathbf{f} \approx 2{,}012\ \mathbf{f}$ en is dus nagenoeg gelijkklinkend aan de eerste toon met frequentie **f** en heet daarom dan ook weer do.
Om het precies te maken, moeten we dus i.p.v. 1,06 eigenlijk de 12^e^ machtswortel van 2 nemen. Dit is de waarde r = 1,05946 (afgerond op 5 decimalen).
Deze waarde houden we nu voor het vervolg aan.

I.p.v. de aanduiding do, re, mi, fa, sol, la, si, do voor de toonladder wordt vaak de aanduiding C, D, E, F, G, A, B, C gebruikt. We laten hier in het midden welke frequentie de 1^e^ toon van de toonladder heeft. De 1^e^ toon hoeft dus in werkelijkheid niet C te zijn!

Kort samengevat:
als de 1^e^ toon van de gewone toonladder C, D, E, F, G, A, B, C de frequentie **f** heeft, dan bestaat de gewone toonladder dus uit de volgende frequenties:

$\mathbf{f}\quad r^{2}\mathbf{f}\quad r^{4}\mathbf{f}\quad r^{5}\mathbf{f}\quad r^{7}\mathbf{f}\quad r^{9}\mathbf{f}\quad r^{11}\mathbf{f}\quad r^{12}\mathbf{f}$ met r = 1,05946.

Afgerond op 3 decimalen wordt dit de reeks:

f 1,120 **f** 1,260 **f** 1,335 **f** 1,498 **f** 1,682 **f** 1,888 **f** 2,000 **f**

Samengevat:
als de 1^e^ toon van de gewone toonladder (die we gemakshalve C noemen) frequentie **f** heeft, dan bestaat de gewone toonladder uit de volgende frequenties:

C	**f**
D	1,120 **f**
E	1,260 **f**
F	1,335 **f**
G	1,498 f
A	1,682 **f**
B	1,888 **f**
C	2,000 **f**

We kunnen nu de vraag beantwoorden welke tonen bij de reeks frequenties **f**, 2**f**, 3**f**, 4**f**, 5**f**, ….. horen.
Zoals al aangegeven, de toon met frequentie **f** noemen we **C**.
Verdubbeling van de frequentie geeft dezelfde toon, zoals we hebben gezien. Dus de frequenties 2**f**, 4**f**, 8**f**, 16**f**, enz. geven ook weer de toon **C**, maar dan steeds een octaaf hoger.
We kijken nu naar de 3^{e} natuurtoon, dus de natuurtoon met frequentie 3**f**. T.o.v. de 2^{e} natuurtoon is de frequentie toegenomen met een factor 3/2 = 1,5. Omdat de 2^{e} natuurtoon de toon **C** is, moet de 3^{e} natuurtoon dus de toon **G** zijn. De frequenties 6**f** en 12**f** zijn dan ook de toon **G**.
Vervolgens bekijken we de 5^{e} natuurtoon, dus de natuurtoon met frequentie 5**f**. T.o.v. de 4^{e} natuurtoon is de frequentie toegenomen met een factor 5/4 = 1,25. Omdat de 4^{e} natuurtoon toon **C** is, moet de 5^{e} natuurtoon dus toon **E** zijn. De 10^{e} natuurtoon is dan ook toon **E**.
We bekijken nu de 9^{e} natuurtoon. T.o.v. de 8^{e} natuurtoon is de frequentie toegenomen met een factor 9/8 = 1,125. Omdat de 8^{e} natuurtoon een **C** is, moet de 9^{e} natuurtoon dus een **D** zijn.
Voor de 16^{e} natuurtoon geldt dat de frequentie t.o.v. de 15^{e} natuurtoon met een factor 16/15 = 1,067 is toegenomen. Dit betekent dat de 16^{e} natuurtoon (bij benadering) een halve toon hoger is dan de 15^{e}, zodat de 15^{e} natuurtoon een **B** moet zijn.
De harmonische reeks natuurtonen komt er dan zo uit te zien:

C, **C**, **G**, **C**, **E**, **G**, 7**f**, **C**, **D**, **E**, 11**f**, **G**, 13**f,** 14**f**, **B**, **C**, ………

Het is nu gemakkelijk in te zien:
dat de 7^{e} natuurtoon een verlaagde **B**b is,
de 14^{e} natuurtoon dus ook, maar dan een octaaf hoger,
dat de 11^{e} natuurtoon ergens tussen **F** en **F**# ligt
en dat de 13^{e} natuurtoon ergens tussen **A** en **A**b ligt.

De harmonische reeks natuurtonen is hiermee volledig bekend. Het is de reeks:

C, **C**, **G**, **C**, **E**, **G**, **B**b-, **C**, **D**, **E**, **F**+, **G**, **A**b+, **B**b-, **B**, **C**, ………

De tonen **Bb-** (iets verlaagde Bes), **F+** (die ergens tussen **F** en **F#** ligt) en **A**b+ (verlaagde **A**) passen niet in de toonladder van **C.** Daarom worden deze i.h.a. niet gebruikt.
De 15^{e} en 16^{e} natuurtoon zijn zo hoog dat ze niet alleen moeilijk aanblaasbaar zijn, maar ook vrij benauwd klinken. Nog hogere tonen zijn nagenoeg onbereikbaar, zouden nog benauwder klinken en verschillen minder dan een halve toon van de 16^{e} natuurtoon, dus deze zijn om drieërlei redenen niet interessant.

De bruikbare tonen van de natuurtonenreeks zijn dus:

(**C**) **C G C E G - C D E - G**

met de eerste **C** tussen haakjes, omdat deze lage toon, als hij al geblazen kan worden, op een andere wijze tot stand komt dan de overige natuurtonen.
Voor de alpenhoorn wordt de 11^{e} natuurtoon **F+** echter wel gebruikt, omdat dan (met een kleine afwijking weliswaar) een halve toonladder gespeeld kan worden .