

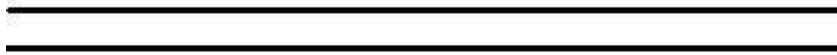
Trillingsleer Pijpen en resonanties

4 natuurkundige modellen

Als we dieper in willen gaan op de theoretische achtergronden van luchttrillingen in pijpen (buizen), dan komen we terecht bij 4 natuurkundige modellen die volledig beschreven zijn.

1.

Open cilindrische pijp (aan beide uiteinden open), met lengte L (in meters):



Als in een dergelijke pijp de luchtkolom (die dus cilindrisch is) in trilling raakt, dan zijn daarbij de volgende frequenties mogelijk:

f, 2f, 3f, 4f, 5f, met **$f = v / 2L$**

V is de geluidssnelheid: 340 m per sec, bij 15^o C.

Nauwkeuriger: $v = 331(1 + t / 273)$ * m per sec bij t: Celsius.

t = 15: v = 340,0

t = 20: v = 342,9

Natuurkundige verklaring

Is vrij elementair. Benodigde natuurkunde: vwo-niveau. Berust op het bestuderen van de zgn. knopen en buiken in een trillende luchtkolom. De frequenties zijn het gevolg van resonanties.

2.

Gesloten cilindrische pijp (aan één uiteinde gesloten), met lengte L (in meters):



Als in een dergelijke pijp de luchtkolom (die dus cilindrisch is) in trilling raakt, dan zijn daarbij de volgende frequenties mogelijk:

f, 3f, 5f, 7f, met **$f = v / 4L$**

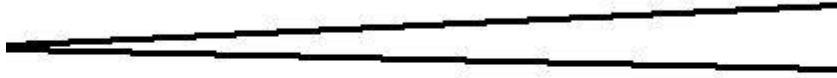
Natuurkundige verklaring

Ook elementair. Net als de vorige gebaseerd op het bestuderen van de knopen en buiken in de trillende luchtkolom. De frequenties zijn het gevolg van resonanties.

We zien dus dat bij een gesloten cilindrische pijp de frequentie van de grondtoon de helft is van de frequentie van de grondtoon van de open cilindrische pijp. De grondtoon van een gesloten cilindrische pijp is dus een octaaf lager dan de grondtoon van een even lange open cilindrische pijp!

3.

Zuiver konische pijp, aan één uiteinde eindigend op een punt, aan het andere uiteinde open, met lengte L (in meters):



Als in een dergelijke pijp de luchtkolom (die dus kegelvormig is) in trilling raakt, dan zijn daarbij de volgende frequenties mogelijk:

$f, 2f, 3f, 4f, 5f, \dots$ met $f = v / 2L$

Natuurkundige verklaring

Bovenstaande wetmatigheid is in tegenstelling tot de voorgaande twee bepaald niet elementair te bewijzen! Het bewijs ligt op het niveau van universitaire wis- en natuurkunde.

Geïnteresseerden worden verwezen naar de wetenschappelijke vakliteratuur op dit gebied.

Verwijzingen: zie verderop.

We zien hier de opvallende uitkomst dat een open cilindrische pijp en een zuiver konische pijp van gelijke lengte dezelfde frequenties opleveren!

4.

Afgeknotte konische pijp, aan het dunste uiteinde gesloten, met lengte L (in meters):



Binnendiameters: d_1 en d_2 (in meters)

Als in een dergelijke pijp de luchtkolom (die dus de vorm van een afgeknotte kegel heeft) in trilling raakt, dan zijn daarbij de volgende frequenties mogelijk:

$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \dots$

met

$$f_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{c}{4L'} \left\{ 1 + \left[1 + \frac{4(d_2 - d_1)}{\pi^2 d_1 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

waarbij c de geluidssnelheid is (340 m/sec bij 15° C) en $L' = L + 0,3 d_2$ (de zgn. akoestische lengte).

(2^e formule van Neville Fletcher)

Voorwaarde

Het ontbrekende (puntvormige) deel van de conus mag niet kort zijn, want dan eindigt de conus nagenoeg op een punt en is model 3 toepasbaar.

Exact: de afstand van de aanblaaskant tot de niet-aanwezige punt mag niet klein zijn.

Voor deze afstand a geldt de elementaire formule $a = d_1 L / (d_2 - d_1)$.

Natuurkundige verklaring

Het bewijs van deze formule is niet elementair, net als bij model 3. Ook hierbij moet verwezen worden naar de wetenschappelijke vakliteratuur.

Bijzonder geval

$$d_1 = d_2$$

De pijp is dan gesloten cilindrisch (model 2).

De 2^e formule van Fletcher gaat dan over in:

$$f_n = 2(n - \frac{1}{2}) c / 4L' = (2n-1) c / 4L' \text{ met } L' = L + 0,3 d_2$$

Dit zijn juist de frequenties van model 2, met de lengte L vervangen door de akoestische lengte L' .

Akoestische lengte

De eindcorrectie $0,3 d_2$ wordt in het algemeen ook toegepast in model 2 en model 3.

De relatie tussen model 2, model 3 en model 4

Het is duidelijk dat er een meetkundige overgang **model 2 → model 4 → model 3** is.

De corresponderende frequenties nemen, op een enkele uitzondering na, toe bij de overgang van links naar rechts.

Het is echter niet zo dat kleine waarden van d_1 per definitie moeten leiden tot toepassing van model 3.

Bij kleine waarden van d_1 hoeft de waarde van a nog niet klein te zijn.

Het komt nogmaals samengevat hierop neer:

Als a , met $a = d_1 L / (d_2 - d_1)$, klein is, dan geldt model 3 en niet model 4.

De conus is dan volledig (met punt) of er "ontbreekt" slechts een klein stukje punt.

Als a niet klein is, dan geldt model 4 en niet model 3.

Het "ontbrekende" stuk van de conus is dan langer.

Bijzonder geval:

Als a heel groot wordt, dan gaat de afgeknotte conus in een cylinder over en gaat model 4 in model 2 over.

Model 2, 3 en 4 zijn relevant voor hoorns die aangeblazen worden m.b.v. liptrilling. In dat geval betreft het een pijp die aan één kant (de blaaskant) als gesloten te beschouwen is. Dit blijkt niet alleen experimenteel, maar is met enige moeite natuurkundig ook wel in te zien.

Model 1 is relevant voor fluitachtige instrumenten. Deze instrumenten blijven hier echter buiten beschouwing.